На правах рукописи

УДК 514.763.85+517.95

КУШНЕР Алексей Гурьевич

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ МОНЖА-АМПЕРА

01.01.04 — геометрия и топология,
01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань — 2010

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» ГОУ ВПО «Астраханский государственный университет»

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Лычагин Валентин Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Аминова Ася Васильевна

доктор физико-математических наук, профессор
Красильщик Иосиф Семенович

доктор физико-математических наук, профессор
Шелехов Александр Михайлович

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Защита состоится «11» марта 2010 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ГОУ ВПО «Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина» по адресу: 420008 Казань, ул. Кремлевская, 18, корп. 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского ГОУ ВПО «Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18.

Автореферат разослан «____» ________________ 2010 г. и размещен на официальном сайте ГОУ ВПО «Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина» : `www.ksu.ru`

Учёный секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент Липачев Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Уравнение Монжа-Ампера имеет следующий вид:

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \tag{1}$$

где A, B, C, D и E — функции от независимых переменных x, y, неизвестной функции $v = v(x, y)$ и ее первых производных v_x, v_y. Далее мы полагаем, что функции A, B, C, D и E принадлежат классу C^∞.

Класс уравнений Монжа-Ампера выделяется из уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения. Этот факт был известен еще Софусу Ли, который в серии работ[1] рассматривал проблему классификации гиперболических уравнений Монжа-Ампера и которую в современных терминах можно обобщить следующим образом: *найти классы эквивалентности уравнений Монжа-Ампера относительно псевдогруппы контактных преобразований.*

Важные результаты на пути к решению этой задачи были получены Дарбу [2] и Гурса[3], которые, также как и Ли, преимущественно рассматривали гиперболические уравнения. В частности, Гурса занимался проблемой эквивалентности уравнений Монжа-Ампера, интегрируемых методом Дарбу. Его идеи были развиты Вессио[4].

Сам Софус Ли сформулировал условия приведения гиперболических уравнений Монжа-Ампера к волновому уравнению $v_{xy} = 0$ при наличии у них двух промежуточных интегралов. Напомним, что *промежуточным интегралом* уравнения Монжа-Ампера называется дифференциальное уравнение первого порядка, каждое решение которого является решением данного уравнения Монжа-Ампера.

Заметим, что не все уравнения Монжа-Ампера обладают промежуточными интегралами. Поэтому результаты Ли применимы не ко всем уравнениям Монжа-Ампера, а только к к тем из них, которые такими интегралами обладают. Кроме того, проверка наличия промежуточных интегралов у общего уравнения Монжа-Ампера, а тем более их построение, является

[1] Lie S. Begrundung einer Invarianten-Theorie der Beruhrungs-Transformationen // Math. Ann. – 1874. – Vol. 8. – P. 215–303.

[2] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. – Vol. I. – Paris.: Gauthier-Villars. – 1887. – vi+514 pp.

[3] Goursat, E. Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre a deux variables indépendantes. – Vol. 1. – Paris. – 1896. – viii+226 pp.

[4] Vessiot E. Sur les équations aux dérivées partielle du second ordre intégrables par la methode de Darboux // J. Math Pures Appl. – 1939. – Vol. 18. – P. 1—61; 1942. – Vol. 21.– P. 1–66.

не простой задачей. Доказательства полученных результатов Ли так и не опубликовал.

В 1978 году Лычагин[5] предложил геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа-Ампера (1).

Основная идея Лычагина заключается в представлении уравнений Монжа-Ампера и их многомерных аналогов дифференциальными формами на пространстве 1-джетов функций на гладком многообразии.

Преимуществом такого подхода перед классическим является редукция порядка пространства джетов: используется более простое пространство 1-джетов J^1M вместо пространства 2-джетов J^2M, в котором, будучи уравнениями второго порядка, *ad hoc* должны лежать уравнения Монжа-Ампера[6]. Такая интерпретация уравнений Монжа-Ампера позволила по-новому взглянуть на проблему их классификации и послужила толчком к появлению множества работ других авторов.

Степень разработанности проблемы. В 1979 году Моримото[7] применил методы теории G-структур для классификации уравнений Монжа-Ампера.

В 1983 году Лычагиным и Рубцовым[8] был рассмотрен класс невырожденных уравнений (1) у которых коэффициенты A, B, C, D, E не зависят от переменной v. Такие уравнения они назвали *симплектическими.* Оказалось, что если коэффициенты такого уравнения — аналитические функции, то локальным симплектическим преобразованием оно может быть приведено к квазилинейному виду, то есть к виду (1), где $D = 0$.

Кроме того, они нашли условия, при которых симплектические уравнения приводятся к уравнению Монжа-Ампера с постоянными коэффициентами и показали, что если эти условия выполняются, то гиперболические уравнения локально эквивалентны волновому уравнению $v_{xy} = 0$, а эллиптические — уравнению Лапласа $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

[5] Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // ДАН СССР. – 1978. – Т. 238. – №5. – С. 273–276.

[6] Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М: “Наука”, 1986. 336 с.

[7] Morimoto T. La géométrie des équations de Monge-Ampère // C. R. Acad. Sci. – 1979. – Paris. Sr. A-B. – Vol. 289. – #1. – P. A25–A28.

[8] Лычагин В.В., Рубцов В.Н. О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа-Ампера // ДАН БССР. – 1983. – Т.27. – №5. – С. 396–398.

Впоследствии Туницкий[9] снял требование независимости коэффициентов уравнения (1) от переменной v и решил проблему приведения уравнений Монжа-Ампера к уравнениям с постоянными коэффициентами в общем виде.

Метод подвижного репера Картана применялся для классификации некоторых классов линейных и нелинейных уравнений Морозовым[10] и другими авторами.

Проблема локальной эквивалентности симплектических операторов Монжа-Ампера гиперболического и эллиптического типов была решена Кругликовым[11].

Цель и задачи диссертационного исследования. В настоящей работе рассматриваются задача классификации уравнений Монжа-Ампера (1) относительно псевдогруппы контактных преобразований. В частности, задача приведения таких уравнений к линейным уравнениям при помощи контактных преобразований.

Перечислим основные задачи исследования:

1) Построить дифференциальные инварианты для гиперболических и эллиптических уравнений Монжа-Ампера относительно псевдогруппы контактных преобразований.

2) В терминах построенных инвариантов найти необходимые и достаточные условия локальной контактной эквивалентности гиперболических и эллиптических уравнений Монжа-Ампера линейным уравнениям вида

$$v_{xx} \pm v_{yy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y) \tag{2}$$

и, в частности, линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

4) Найти необходимые и достаточные условия локальной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера переменного типа обобщенным уравнениям Трикоми и Келдыша.

4) Построить нормальные формы для уравнений Монжа-Ампера.

[9] Туницкий Д.В. О контактной линеаризации уравнений Монжа-Ампера // Изв. РАН. – 1996. – Серия матем. – Т. 60. – №2. – С. 195–220.

[10] Morozov O.I. Contact equivalence problem for nonlinear wave equations [Электронный ресурс] // Preprint arXiv: math-ph / 0306007v1. – 2003. – P. 1–13. URL: http://arxiv.org/abs/math-ph/0306007 (дата обращения 10.11.2009).

[11] Kruglikov B.S. Classification of Monge-Ampère equations with two variables // CAUSTICS'98 (Warsaw). Polish Acad. Sci. Warsaw. – 1999. – P. 179–194.

5) Решить проблему локальной эквивалентности уравнений и операторов Монжа-Ампера общего положения гиперболического, эллиптического и переменного типов относительно контактной и симплектических псевдогрупп преобразований.

Объектом исследования являются уравнения Монжа-Ампера гиперболического, эллиптического и переменного типов.

Теоретическую и методологическую основу исследования составляют методы современной дифференциальной геометрии. Используется подход Лычагина к уравнениям Монжа-Ампера. Для построения дифференциальных инвариантов уравнений используется разложение комплекса де Рама на пространстве 1-джетов.

Для решения проблемы эквивалентности уравнений переменного типа мы строим e-структуру, однозначно определяющую уравнение Монжа-Ампера. Таким образом, задача эквивалентности уравнений сводится к задаче эквивалентности e-структур, которая решается известными методами.

Научная новизна исследования. Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1) Для невырожденных уравнений Монжа-Ампера построены тензорные дифференциальные инварианты относительно псевдогруппы контактных преобразований. В том числе — две дифференциальные 2-формы на пространстве 1-джетов J^1M, которые мы называем *формами Лапласа*, и которые являются обобщениями классических инвариантов Лапласа и Коттона, построенных ими для линейных уравнений.

2) С помощью форм Лапласа для регулярных невырожденных уравнений Монжа-Ампера решается проблема их приведения к линейным уравнениям контактными преобразованиями. Указываются нормальные формы для таких уравнений.

3) Для регулярных невырожденных уравнений Монжа-Ампера решается

проблема локальной контактной эквивалентности.

4) Для невырожденных уравнений и операторов Монжа-Ампера, коэффициенты которых не зависят от функции v, решается проблема локальной эквивалентности относительно симплектических преобразований. Построены нормальные формы для таких уравнений и операторов.

5) Для уравнений Монжа-Ампера переменного типа найдены необходимые и достаточные условия приведения их к уравнениям Трикоми и Келдыша, а так же к уравнениям, их обобщающим.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический и прикладной характер. Они могут быть использованы для дальнейших исследований уравнений Монжа-Ампера, а также для изучения нелинейных эффектов типа ударных волн, для построения точных решений уравнений Монжа-Ампера и для упрощения процедуры нахождения симметрий уравнений. В диссертационной работе приведены примеры применения полученных результатов к нелинейным уравнениям математической физики: к уравнению Хантера-Сакстона, уравнению Борна-Инфельда и к некоторым уравнениям газовой динамики. Результаты диссертационной работы позволяют по-новому взглянуть на классические инварианты Лапласа для линейных уравнений. На основе этих результатов составлены спецкурсы для студентов и аспирантов, которые читаются в Астраханском госуниверситете, Институте проблем управления РАН и на Международных научных молодежных школах ("Лобачевские чтения" в Казанском госуниверситете (2006, 2007 годы), I, II и III Международные молодежные школы по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям и управлению), что подтверждено соответствующими справками о внедрении.

Исследования автора по контактной линеаризации уравнений Монжа-Ампера частично финансировались Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант 08-01-00601).

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

— на семинаре по дифференциальной геометрии под руководством профессора В. В. Вишневского (Казань, КГУ им. В. И. Ульянова-Ленина, май 2006 г.);

— на семинаре по дифференциальной геометрии под руководством профессора В. Ф. Кириченко (Москва, МПГУ, октябрь 2009 г.);

— на семинаре по геометрии дифференциальных уравнений под руководством профессора И. С. Красильщика (Москва, Независимый московский университет, апрель–май 2006, октябрь 2008 г.);

— на семинаре по геометрии дифференциальных уравнений под руководством профессора В. В. Лычагина (февраль–март 2002, Тромсе, Норвегия, Университет Тромсе);

— на семинаре "Топология и анализ" под руководством профессора А. С. Мищенко (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, ноябрь 2008 г.);

— на семинаре по математической физике и геометрии дифференциальных уравнений под руководством профессора В. Н. Рубцова (Анжэ, Франция, Университет Анжэ, июнь–июль 2000 г.);

— на семинаре кафедры "Дифференциальная геометрия и приложения" под руководством академика А. Т. Фоменко (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, октябрь 2008 г.);

— на Международной конференции "Лаптевские чтения", посвященной 100-летию Г. Ф. Лаптева (МГУ им. М. В. Ломоносова — Тверской государственный университет, Москва–Тверь, 25–29 августа 2009 г.);

— на III Международном конгрессе "Симметрии: теоретический и методический аспекты" (Астрахань, Астраханский госуниверситет, 10–14 сентября 2009 г.);

— на Пятом абелевском симпозиуме ("Fifth Abel Symposium", Тромсе, Норвегия, 17–22 июня 2008 г.);

— на Международной конференции "X Белорусская математическая конференция" (Белорусский госуниверситет и Институт математики НАН Беларуси, Минск, 3–7 ноября 2008 г.)

— на Международной конференции "Geometry and Algebra of PDEs", посвященной 60-летию В. В. Лычагина (Тромсе, Норвегия, 12–17 августа 2007 г.)

— на Международной конференции “Анализ и особенности”, посвященной 70-летию В. И. Арнольда (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, 20–24 августа 2007 г.);

— на Международном семинаре “Идемпотентная и тропическая математика и проблемы математической физики” (Москва, Независимый московский университет, 25–30 августа 2007 г.);

— на Международной школе “Geometry of vector distributions, differential equations, and variational problems” (SISSA, Триест, Италия, 13–15 декабря 2006 г.);

— на Международной школе “Formal theory of partial differential equations and their applications” (Университет Йонсу, Финляндия, 2–9 апреля 2006 г.);

— на Международном коллоквиуме “Mathematics in Engineering and Numerical Physics” (University Politehnica of Bucharest, Бухарест, Румыния, 6–8 октября 2006 г.);

— на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (МГУ–РГУ, Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2006 г.);

— на Международной конференции “Лаптевские чтения” (МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, июль 2006 г.);

— на серии ежегодных Международных конференций “Геометрия в Одессе” (Одесса, Украина, 2005–2009 годы);

— на серии ежегодных Международных конференций “Геометрия в Астрахани” (Астраханский государственный университет, Астрахань, 2007–2009 годы);

— на IX Международном семинаре “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” им. Е. С. Пятницкого (31 мая–2 июня 2006 г., Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова, Москва);

— на I Международном семинаре “Симметрии: теоретический и методический аспекты” (Астраханский государственный университет, Астрахань, 15–17 сентября 2005 г.);

— на V конференции Европейского общества математической и теоретической биологии “Mathematical Modelling and Computing in Biology and Medicine” (Milano, Italy, 2002 г.);

— на Международной конференции “Classical and Quantum Geometry of Homogeneous Spaces” (Москва, 1994 г.)

— на Международном коллоквиуме “International Geometrical Colloquium (UNESCO)” (Москва–Париж, 10–14 мая, 1993 г.);

— на Международном коллоквиуме Ли–Лобачевского (Lie-Lobachevsky Colloquium, Университет Тарту, Тарту, Эстония, 26–30 октября, 1992 г.)

Публикации. Результаты, основные положения и выводы диссертационного исследования отражены в 29 публикациях в периодических изданиях и тематических сборниках общим объемом 20,3 п. л. и монографии объемом 32,4 п.л. В том числе 7 статей опубликованы в журналах, определенных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. 24 опубликованных научных работа по теме исследования выполнены без соавторов, 6 работ написаны совместно, при этом вклад автора составляет от 40% до 75%.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика и содержание диссертации), четырех глав, двух приложений и списка цитируемой литературы. Диссертация содержит 16 таблиц, 2 диаграммы и 2 рисунка. Библиографический список состоит из 101 наименования. Полный объём диссертации составляет 245 страниц машинописного текста.

Нумерация параграфов производится двумя символами, а нумерация пунктов и подпунктов — тремя и четырьмя соответственно. Например, номером 3.2 обозначен второй параграф третьей главы, а номером 3.2.1 — первый пункт второго параграфа третьей главы.

Нумерация рисунков, диаграмм, таблиц и теорем в тексте диссертации сквозная, а нумерация формул в каждой главе своя.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дается общая характеристика работы, формулируются основные результаты и приводится краткий исторический обзор по классификации уравнений Монжа-Ампера.

В **первой главе** “Уравнения Монжа-Ампера и ассоциированные с ними геометрические структуры” вводятся основные понятия, используемые в диссертационной работе. Кроме того, в ней разрабатывается математический аппарат для построения тензорных дифференциальных инвариантов структуры, обобщающей структуру почти произведения и почти комплексную структуру. Эту структуру мы называем структурой *r-кратного почти произведения.*

Остановимся более подробно на содержании первой главы.

В п. 1.1 “Операторы и уравнения Монжа-Ампера” мы описываем подход Лычагина[12] к уравнениям Монжа-Ампера и приводим необходимые нам в дальнейшем определения и результаты.

Пусть M — 2-мерное гладкое многообразие и J^1M — пространство 1-джетов гладких функций на M. Каждая дифференциальная 2-форма $\omega \in \Omega^2(J^1M)$ может рассматриваться как нелинейный дифференциальный оператор

$$\Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Omega^2(M),$$

действующий на функцию $v \in C^\infty(M)$ по следующему правилу:

$$\Delta_\omega(v) = \omega|_{j_1(v)(M)}.$$

Здесь $j_1(v)(M) \subset J^1M$ — график 1-джета функции v и $\omega|_{j_1(v)(M)}$ — ограничение дифференциальной формы ω на этот график. Оператор Δ_ω называется *оператором Монжа-Ампера*, а соответствующее уравнение $E_\omega = \{\Delta_\omega(v) = 0\}$ — *уравнением Монжа-Ампера.*

Гладкое многообразие 1-джетов J^1M, $\dim J^1M = 5$, снабжено естественной контактной структурой, задаваемой распределением Картана $\mathcal{C}$ или дифференциальной 1-формой Картана $\mathcal{U}$, которая в стандартных локальных координатах q_1, q_2, u, p_1, p_2 на J^1M имеет следующий канонический вид:

$$\mathcal{U} = du - p_1dq_1 - p_2dq_2.$$

[12]Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Успехи математических наук. – 1979. – Т. 34. – № 1(205). – С. 137–165.

Подпространство $\mathcal{C}(a) = \ker \mathcal{U}_a$ касательного пространства $T_a(J^1M)$ называется *подпространством Картана.*

Диффеоморфизм $\phi : J^1M \to J^1M$ называется *контактным*, если он сохраняет распределение Картана.

Дифференциальные формы на J^1M, исчезающие на любом интегральном многообразии распределения Картана и, поэтому, порождающие нулевые дифференциальные операторы, образуют идеал во внешней алгебре $\Omega^* \left(J^1M\right)$.

Элементы фактор-модуля

$$\Omega^2_\varepsilon \left(J^1M\right) = \Omega^2 \left(J^1M\right) / I^2$$

называются *эффективными* 2-формами. Здесь I^2 — модуль дифференциальных 2-форм, исчезающих на распределении Картана.

Пусть ω — дифференциальная 2-форма на J^1M. Отвечающую ей эффективную форму мы будем обозначать ω_ε, то есть $\omega_\varepsilon = \omega \mod I^2$. Пусть X_1 — контактное векторное поле с производящей функцией 1. В каждой точке $a \in J^1M$ касательное пространство $T_a(J^1M)$ распадается в прямую сумму

$$T_a(J^1M) = \langle X_{1,a} \rangle \oplus \mathcal{C}(a).$$

Для любого элемента фактор-модуля $\Omega^2_\varepsilon \left(J^1M\right)$ может быть выбран единственный представитель $\omega \in \Omega^2 \left(J^1M\right)$, такой, что $X_1 \rfloor \omega = 0$ и $\omega \wedge d\mathcal{U} = 0$.

Пусть ϕ — контактный диффеоморфизм на J^1M. Тогда ϕ^* сохраняет модуль I^2 и, поэтому, определяет отображение эффективных 2-форм:

$$\phi^* : \omega \mod I^2 \mapsto \phi^*(\omega) \mod I^2.$$

Определим действие ϕ^* на эффективных формах следующим образом: $\phi^*(\omega_\varepsilon) = \phi^*(\omega)_\varepsilon$, а также действие ϕ на уравнения и операторы Монжа-Ампера, положив $\phi(E_\omega) = E_{\phi^*(\omega_\varepsilon)}$ и $\phi(\Delta_\omega) = \Delta_{\phi^*(\omega_\varepsilon)}$.

Два уравнения Монжа-Ампера E_{ω_1} и E_{ω_2} назовем *локально контактно эквивалентными в точке* $a \in J^1M$, если существует такой локальный контактный диффеоморфизм ϕ некоторой окрестности этой точки, что $\phi(a) = a$ и $\phi(E_{\omega_1}) = E_{\omega_2}$. В терминах дифференциальных форм это означает, что $(\phi^*(\omega_1))_\varepsilon = h_\phi(\omega_2)_\varepsilon$ для некоторой функции h_ϕ, $h_\phi(a) \neq 0$.

Аналогично, контактная эквивалентность дифференциальных операторов Монжа-Ампера Δ_{ω_1} и Δ_{ω_2} означает, что существует локальный контактный диффеоморфизм ϕ некоторой окрестности этой точки, такой что $\phi(a) = a$ и $(\phi^*(\omega_1))_\varepsilon = (\omega_2)_\varepsilon$.

Ограничение дифференциала формы Картана на подпространство Картана $\mathcal{C}(a)$ невырождено и определяет на нем симплектическую структуру Ω_a. Определим ассоциированный с формой ω оператор A_ω, действующий на векторных полях из распределении Картана[13]:

$$A_\omega X \rfloor \ \Omega = X \ \rfloor \omega. \tag{3}$$

Функцию $\mathrm{Pf}(\omega) \in C^\infty\left(J^1M\right)$, определяемую равенством

$$\mathrm{Pf}(\omega)\Omega \wedge \Omega = \omega \wedge \omega, \tag{4}$$

мы называем *пфаффианом* формы ω. Квадрат оператора A_ω скалярен и

$$A_\omega^2 + \mathrm{Pf}(\omega) = 0. \tag{5}$$

Пусть ω — эффективная дифференциальная 2-форма. Уравнение E_ω называется *гиперболическим, параболическим* или *эллиптическим* в точке $a \in J^1M$, если в этой точке пфаффиан формы ω отрицательный, нулевой или положительный соответственно. Если $\mathrm{Pf}(\omega)(a) \neq 0$, то уравнение называется *невырожденным* в точке a. Если в некоторой области пфаффиан меняет знак, то соответствующее уравнение называется уравнением *переменного типа*. Если для уравнения E_ω пфаффиан не обращается в нуль в некоторой области, то форму ω можно нормировать так, чтобы $\mathrm{Pf}(\omega) = -1$ — в гиперболическом случае, или $\mathrm{Pf}(\omega) = 1$ — в эллиптическом. Оператор A_ω, отвечающий нормированной форме ω, мы будем обозначать A.

Таким образом, для гиперболических уравнений нормированный оператор порождает на подпространстве Картана $\mathcal{C}(a)$ структуру почти произведения ($A_a^2 = 1$), а для эллиптических уравнений — комплексную структуру ($A_a^2 = -1$).

Для гиперболических уравнений в каждой точке $a \in J^1M$ касательное пространство к многообразию 1-джетов распадается в прямую сумму трех подпространств[14]:

$$T_a(J^1M) = \mathcal{C}_+(a) \oplus l(a) \oplus \mathcal{C}_-(a).$$

Здесь $\mathcal{C}_\pm(a)$ — двумерные собственные подпространства нормированного оператора A_a, а $l(a)$ — одномерное подпространство, трансверсальное

[13] Лычагин В.В., Рубцов В.Н. О теоремах Софуса Ли для уравнений Монжа-Ампера // ДАН БССР. – 1983. – Т.27. – №5. – С. 396–398.

[14] Lychagin V.V. Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1,2. Rome: “La Sapienza”, 1993.

подпространству Картана. Поэтому гиперболическое уравнение Монжа-Ампера порождает на пространстве J^1M набор из трех распределений $\mathcal{P} = (\mathcal{C}_+, l, \mathcal{C}_-)$. Такая структура является частным случаем структуры r-кратного почти произведения, тензорные инварианты которой строятся в п. 1.2. Распределения $\mathcal{C}_+$ и $\mathcal{C}_-$ называются *характеристическими.* Для эллиптических уравнений мы получим аналогичную конструкцию, только вместо касательного пространства $T_a(J^1M)$ нужно рассматривать его комплексификацию.

Невырожденное уравнение Монжа-Ампера мы называем *регулярным*, если производные $\mathcal{C}_\pm^{(k)}$, $(k = 1, 2, 3)$ характеристических распределений также являются распределениями.

В п. 1.2 "Дифференциальные тензорные инварианты структуры r-кратного почти произведения" изучается структура, которая является естественным обобщением структуры почти прямого произведения и почти комплексной структуры на гладких многообразиях.

Пусть N — гладкое многообразие и пусть $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_r)$ — упорядоченный набор (действительных или комплексных) распределений на N. Будем говорить, что на N задана структура *r-кратного почти произведения* $\mathcal{P}$, если в каждой точке a многообразия N касательное пространство (для действительных распределений) или его комплексификация (для комплексных распределений) распадается в прямую сумму подпространств $\mathcal{P}_1(a), \ldots, \mathcal{P}_r(a)$.

Разложения касательных пространств в прямую сумму подпространств влечет разложение в прямую сумму модуля дифференциальных s-форм на N:

$$\Omega^s(N) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Omega^{\mathbf{k}}, \tag{6}$$

где

$$\Omega^{\mathbf{k}} = \left\{ \sum_{j_1+\cdots+j_r=|\mathbf{k}|} \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_r} \;\middle|\; \alpha_{j_i} \in \Omega_i^{k_i} \right\} \subset \bigotimes_{i=1}^{r} \Omega_i^{k_i}, \tag{7}$$

а модули

$$\Omega_i^s = \{\alpha \in \Omega^s(N) | \;\; X \rfloor \alpha = 0 \;\forall\; X \in D_j, \; j \neq i\} \subset \Omega^s(N)$$

состоят из внешних дифференциальных s-форм, вырождающихся на векторных полях D_j, $j \neq i$. Здесь $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$— мультииндекс длины r,

$|\mathbf{k}| = \sum_{i=1}^{r} k_i$, а $D_i = D(\mathcal{P}_i)$ — модули векторных полей, лежащих в распределениях $\mathcal{P}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Внешняя алгебра, тем самым, является $\mathbb{N}^r$-градуированной алгеброй и внешний дифференциал распадается в прямую сумму

$$d = \bigoplus_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}},$$

где $d_{\mathbf{t}} : \Omega^{\mathbf{k}} \to \Omega^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}$. Здесь $\mathbf{t}$ — мультииндексы длины r.

Если мультииндекс $\mathbf{t}$, для которого $|\mathbf{t}| = 1$, содержит одну отрицательную компоненту и она равна -1, то $\mathbf{t} = \mathbf{1}_j + \mathbf{1}_k - \mathbf{1}_s$, где $s \neq j, k$. Здесь в мультииндексе $\mathbf{1}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ единица стоит на i-м месте. Только для таких мультииндексов операторы $d_{\mathbf{t}}$ являются $C^\infty(N)$-гомоморфизмами. Этот дифференциал полностью определяется своими значениями на модуле $\Omega^1(N)$. Поэтому дифференциал $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ определяет на N тензорное поле типа (2,1), которое мы будем обозначать $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$. Единственная нетривиальная компонента этого тензорного поля — его ограничение на модуль $\Omega^{\mathbf{1}_s}$, причем ограничение $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : \Omega^{\mathbf{1}_s} \to \Omega^{\mathbf{1}_j} \wedge \Omega^{\mathbf{1}_k}$ совпадает с $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$.

Тензорные поля $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ позволяют определить дифференциальные 2-формы, ассоциированные со структурой r-кратного почти произведения. Пусть $A, B \in \Omega^2 \otimes D$ — тензорные поля на N. Здесь $\Omega^2 = \Omega^2(N)$ и $D = D(N)$. В силу естественного вложения

$$\Omega^2 \otimes D \otimes \Omega^2 \otimes D \xhookrightarrow{\iota} \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D,$$

тензорное произведение $A \otimes B$ можно рассматривать как элемент пространства $T = \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes D$.

Пусть C^i_j — операция свертки элемента пространства T по индексам i и j $(i = 3, 6; j = 1, 2, 4, 5)$. Тогда

$$\langle A, B \rangle_W = \frac{1}{2} C^6_1 \circ C^3_4 (\iota(A) \otimes \iota(B) - \iota(B) \otimes \iota(A))$$

— внешняя дифференциальная 2-форма на N. Операцию $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ будем называть операцией *косой свертки.*

Определим дифференциальные 2-формы, ассоциированные со структурой r-кратного почти произведения:

$$\left\langle \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}, \tau_{\mathbf{1}_p+\mathbf{1}_q-\mathbf{1}_r} \right\rangle_W. \tag{8}$$

Эти формы являются основным инструментом при классификации уравнений Монжа-Ампера.

Во **второй главе** “Классификация гиперболических уравнений Монжа-Ампера” рассматривается локальная классификация уравнений относительно псевдогруппы контактных преобразований. Мы строим две дифференциальные 2-формы, инвариантно связанные с уравнениями Монжа-Ампера. В терминах этих форм мы указываем условия приведения гиперболических уравнений Монжа-Ампера заменой переменных к линейным уравнениям, а также условия локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера.

Мы приводим нормальные формы для уравнений Монжа-Ампера, среди которых имеются хорошо известные телеграфное и уравнение Эйлера-Пуассона. Полученные результаты мы иллюстрируем на модельных примерах.

В п. 2.1 “Дифференциальные тензорные инварианты гиперболических уравнений” мы используем методы, развитые нами в первой главе.

Пусть E_ω — гиперболическое уравнение Монжа-Ампера и $\mathcal{C}_+$ и $\mathcal{C}_-$ — его характеристические распределения. Эти распределения мы обозначим через $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_3$ соответственно, а одномерное распределение l — через $\mathcal{P}_2$. Таким образом, на пространстве 1-джетов J^1M мы получаем структуру 3-кратного почти произведения $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{P}_i$. Построенные в первой главе тензорные дифференциальные инварианты, вычисленные для этой структуры, дают инварианты гиперболических уравнений Монжа-Ампера относительно контактных преобразований.

Действие внешнего дифференциала представлено на Диаграмме 1. Согласно этой диаграмме, мы получаем четыре (остальные тензоры равны нулю) дифференциальных тензорных инварианта гиперболического уравнения Монжа-Ампера: $\tau_{2,-1,0}, \tau_{0,-1,2}, \tau_{-1,1,1}$ и $\tau_{1,1,-1}$.

Построим дифференциальные 2-формы (8) для структуры 3-кратного почти произведения, порожденного гиперболическим уравнением. В нашем случае таких форм две:

$$\lambda_+ = \langle \tau_{0,-1,2}, \tau_{1,1,-1} \rangle_W , \qquad \lambda_- = \langle \tau_{2,-1,0}, \tau_{-1,1,1} \rangle_W . \tag{9}$$

Коэффициенты этих форм, вычисленных для линейных гиперболических уравнений, представляют собой классические инварианты Лапласа.

Поэтому формы λ_+ и λ_- мы называем *формами Лапласа.*

Инварианты Лапласа имеют давнюю историю. В 1769–1770 годах при решении проблемы интегрирования линейных гиперболических уравнений

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v \tag{10}$$

Эйлер[15] ввел функции $h = ab + c - a_x$ и $k = ab + c - b_y$. Эти функции являются относительными инвариантами при преобразованиях независимых переменных x, y и зависимой переменной v, которые сохраняют класс уравнений (10). Такие преобразования имеют следующий вид:

$$(x, y, v) \mapsto (X(x), Y(y), Z(x,y)v), \tag{11}$$

где X, Y, Z — некоторые гладкие функции. Функции h и k при таких преобразованиях умножаются на $X'(x)Y'(y)$, то есть ведут себя как коэффициенты некоторой дифференциальной формы.

Позднее, в 1773 году, Лаплас[16] существенно развил идеи Эйлера, создав так называемый "каскадный метод" интегрирования уравнений. Инварианты h и k играют в нем ключевую роль.

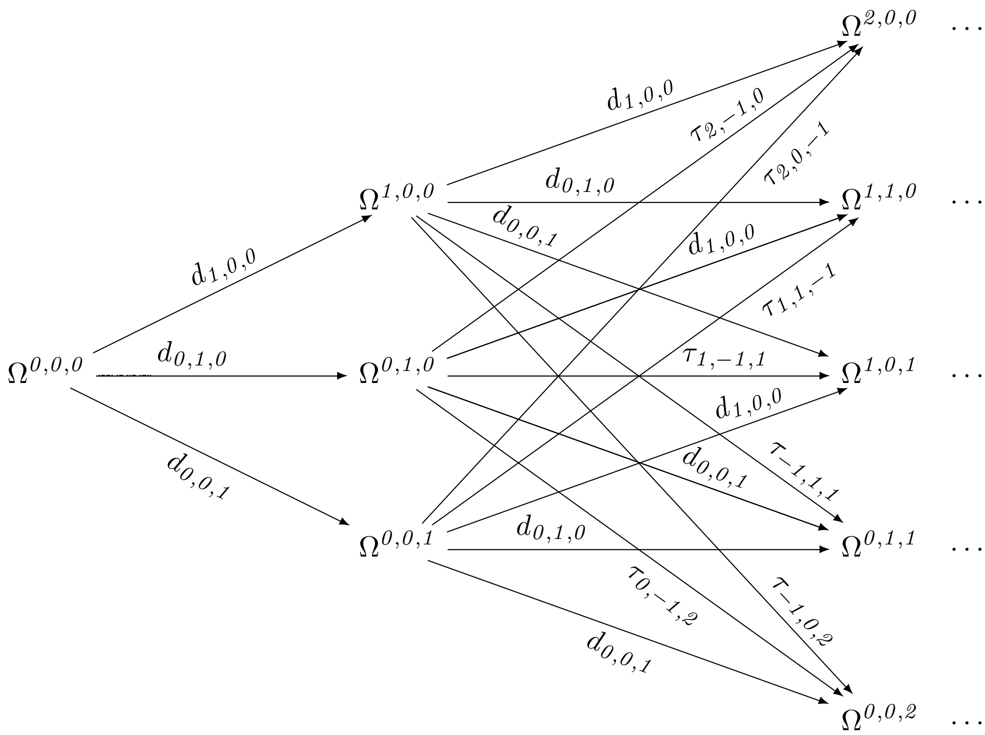

Диаграмма 1. Разложение комплекса де Рама для уравнений Монжа-Ампера.

В 1890-х годах Дарбу усовершенствовал метод Лапласа и назвал функции h и k *инвариантами Лапласа.*

[15] Euler L. Calcvli integralis. Vol.3. Petropoli: Impenfis Academiac Imperialis Scientiarium, 1770.

[16] Laplace P.S. Recherches sur le calcul intégrals aux différences partielles// Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris 23. – 1773. – Vol. 24.

Ибрагимов[17] и Овсянников[18] использовали инварианты Лапласа для классификации линейных гиперболических уравнений.

Построенные нами дифференциальные 2-формы λ_+ и λ_- являются аналогами инвариантов Лапласа. Действительно, линейное гиперболическое уравнение (10) заменой переменных (11) приводится к волновому уравнению $v_{xy} = 0$ тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа h и k — тождественные нули. Для уравнений Монжа-Ампера мы доказываем аналогичное утверждение (см. теорему 8 на с. 19).

В качестве примера укажем координатные представления форм Лапласа для уравнений вида

$$v_{xy} = f\left(x, y, v, v_x, v_y\right).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\lambda_- = & f_{p_2p_2}\left(f_{p_1}dq_1 \wedge du - dq_1 \wedge dp_2\right) + \\ & \left(f_u - p_2 f_{p_2u} + f_{p_1}f_{p_2} - p_2 f_{p_1}f_{p_2p_2} - f f_{p_1p_2} - f_{q_2p_2}\right) dq_1 \wedge dq_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_+ = & f_{p_1p_1}\left(f_{p_2}dq_2 \wedge du - dq_2 \wedge dp_1\right) + \\ & \left(-f_u + p_1 f_{p_1u} - f_{p_1}f_{p_2} + p_1 f_{p_2}f_{p_1p_1} + f f_{p_1p_2} + f_{q_1p_1}\right) dq_1 \wedge dq_2.\end{aligned}$$

В п. 2.2 "Контактная линеаризация гиперболических уравнений" мы приводим полное решение проблемы линеаризации для регулярных гиперболических уравнений Монжа-Ампера. Эта проблема, восходящая к Софусу Ли, в современной формулировке звучит так: *найти условия, при которых гиперболические уравнения Монжа-Ампера (1) контактно эквивалентны линейному уравнению вида*

$$v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y), \tag{12}$$

где a, b, c, g *— гладкие функции.*

Отметим, что процедура линеаризации уравнений, предложенная нами, конструктивна и требует только нахождения первых интегралов вполне интегрируемых распределений.

При решении вопроса о контактной линеаризации регулярных уравнений Монжа-Ампера нами рассматриваются три возможных случая:

— обе формы Лапласа равны нулю;

[17] Ибрагимов Н.Х. Инварианты гиперболических уравнений: решение проблемы Лапласа // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т. 45. – №2. – С. 11—21.

[18] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.:"Наука", 1978. 399 с.

— одна из форм Лапласа равна нулю, а другая — нет;

— обе формы Лапласа не равны нулю.

Следующие три теоремы отвечают перечисленным выше случаям и дают полное решение проблемы контактной линеаризации для регулярных гиперболических уравнений.

Теорема 8. *Гиперболическое регулярное уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно волновому уравнению* $v_{xy} = 0$ *тогда и только тогда, когда обе его формы Лапласа равны нулю.*

Теорема 10. *Пусть для регулярного гиперболического уравнения Монжа-Ампера* $\lambda_- = 0$ *и* $\lambda_+ \neq 0$. *Уравнение локально контактно эквивалентно линейному уравнению (12) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *форма Лапласа* λ_+ *замкнута;*

2) $\lambda_+ \wedge \lambda_+ = 0$, *то есть* $\lambda_+ = \eta_- \wedge \vartheta_+$, *где* $\eta_- \in \Omega^{0,0,1}$ *и* $\vartheta_+ \in \Omega^{1,0,0}$;

3) *распределения* $\mathcal{F}\langle\eta_-\rangle$ *и* $\mathcal{F}\langle\vartheta_+\rangle$ *вполне интегрируемы.*

Теорема 11. *Пусть для регулярного гиперболического уравнения Монжа-Ампера обе формы Лапласа не равны нулю в точке* $a \in J^1M$. *Уравнение локально контактно эквивалентно линейному уравнению (12) тогда и только тогда, когда формы Лапласа замкнуты, для них выполняются условия* $\lambda_- \wedge \lambda_- = \lambda_+ \wedge \lambda_+ = \lambda_- \wedge \lambda_+ = 0$, *то есть то есть* $\lambda_+ = \eta_- \wedge \vartheta_+$, *где* $\eta_- \in \Omega^{0,0,1}$ *и* $\vartheta_+ \in \Omega^{1,0,0}$, *а распределения* $\mathcal{F}\langle\eta_-\rangle$ *и* $\mathcal{F}\langle\eta_+\rangle$ *вполне интегрируемы.*

В качестве иллюстрации сформулированных теорем строится контактная линеаризация уравнение Хантера-Сакстона[19], возникающего в теории жидких кристаллов, и уравнения нестационарного газового потока.

В п. 2.3 "Нормальные формы гиперболических уравнений Монжа-Ампера" приводятся условия локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера следующим уравнениям:

- $v_{xy} = k(x, y)v$;
- $v_{xy} = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (телеграфное уравнение);

[19]Hunter J.K., Saxton R. Dynamics of director fields // SIAM J. Appl. Math. – 1991. – Vol. 51. – №6. – P. 1498–1521.

- $v_{xy} = \frac{\alpha}{x+y} v_x + \frac{\beta}{x+y} v_y - \frac{\alpha\beta}{(x+y)^2} v$ (уравнение Эйлера-Пуассона).

В п. 2.4 "Контактная эквивалентность гиперболических уравнений Монжа-Ампера" строится e-структура, ассоциированная с уравнениями Монжа-Ампера, для которых тензорные поля $\tau_{1,1,-1}$ и $\tau_{-1,1,1}$ не обращаются в нуль. Эта e-структура порождается набором пяти векторных полей, которые однозначно определяются уравнением. Следующая теорема сводит проблему локальной контактной эквивалентности гиперболических уравнений Монжа-Ампера к проблеме эквивалентности соответствующих e-структур, решение которой известно.

Теорема 16. *Два гиперболических уравнения Монжа-Ампера локально контактно эквивалентны тогда и только тогда, когда локально эквивалентны их соответствующие e-структуры.*

В **третьей главе** "Классификация эллиптических уравнений Монжа-Ампера" мы решаем задачу локальной классификации эллиптических уравнений Монжа-Ампера относительно псевдогруппы контактных преобразований.

В п. 3.1 "Тензорные инварианты эллиптических уравнений" мы строим дифференциальные инварианты для эллиптических уравнений. Формы Лапласа λ_+ и λ_- для эллиптических уравнений определяются так же, как и для уравнений гиперболических — по формулам (9). Но, в отличие от гиперболических уравнений, формы Лапласа здесь являются комплексными.

В частности, для линейного уравнения

$$v_{xx} + v_{yy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y) \tag{13}$$

формы Лапласа имеют вид:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4}\left(b_{q_1} - a_{q_2} \pm \left(\frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2c - a_{q_1} - b_{q_2}\right)\iota\right) dq_1 \wedge dq_2.$$

Здесь ι — мнимая единица. Коэффициенты действительных и мнимых частей этих форм представляют собой относительные инварианты Коттона[20], найденные им для линейных уравнений вида (13) в 1900 году.

В п. 3.2 "Контактная линеаризация эллиптических уравнений" решается проблема линеаризации уравнений Монжа-Ампера в следующей формулировке: *найти условия, при которых эллиптические уравнения Монжа-*

[20] Cotton, E. Sur les invariants différentiels de quelques équations linearies aux dérivées partielles du second ordre // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1900. – № 17. – P. 211—244.

Ампера (1) контактным преобразованием приводятся к линейному уравнению (13).

В отличие от гиперболического случая, для регулярных эллиптических уравнений либо обе формы Лапласа равны нулю, либо обе формы не равны нулю. Мы рассматриваем оба этих случая.

Теорема 17. *Эллиптическое регулярное уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно уравнению Пуассона*

$$v_{xx} + v_{yy} = f(x, y)$$

тогда и только тогда, когда обе его формы Лапласа равны нулю.

Теорема 18. *Регулярное эллиптическое уравнение Монжа-Ампера, у которого обе формы Лапласа не равны нулю, локально контактно эквивалентно линейному уравнению (13) тогда и только тогда, когда формы Лапласа замкнуты,* $\lambda_- \wedge \lambda_- = \lambda_+ \wedge \lambda_+ = \lambda_+ \wedge \lambda_- = 0$, *то есть* $\lambda_- = \eta_+ \wedge \vartheta_-$ *и* $\lambda_+ = \eta_- \wedge \vartheta_+$, *где* $\eta_+, \vartheta_+ \in \Omega^{1,0,0}$, $\eta_-, \vartheta_- \in \Omega^{0,0,1}$, *и комплексные распределения* $\mathcal{F}\langle \eta_+ \rangle$ *и* $\mathcal{F}\langle \eta_- \rangle$ *вполне интегрируемы.*

Для уравнений Монжа-Ампера, удовлетворяющих условиям последней теоремы, построены скалярные дифференциальные инварианты и приведены условия их контактной эквивалентности уравнению

$$v_{xx} + v_{yy} = k(x, y)v + f(x, y).$$

В п. 3.3 "Уравнение Гельмгольца" приведены условия контактной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера уравнению Гельмгольца

$$v_{xx} + v_{yy} = \kappa v + f(x, y), \qquad \kappa \in \mathbb{R}.$$

В **четвертой главе** "Классификация симплектических уравнений Монжа-Ампера" рассматриваются уравнения Монжа-Ампера, допускающие описание в терминах симплектической геометрии. Для таких уравнений вместо гладкого многообразия 1-джетов J^1M мы используем кокасательное расслоение T^*M.

В п. 4.1 "Симплектические уравнения Монжа-Ампера" рассматриваются симплектические аналоги конструкций, описанных в первой главе. Если коэффициенты уравнения Монжа-Ампера не зависят от неизвестной функции v явным образом, то вместо контактной геометрии можно рассматривать симплектическую. Действительно, пусть коэффициенты A, B, C, D и

E уравнения (1) — функции от x, y и v_x, v_y. Это означает, что производная Ли вдоль контактного векторного поля X_1 от эффективной формы ω равна нулю. Это свойство не инвариантно относительно контактных преобразований, так как векторное поле X_1 не сохраняется, вообще говоря, при таких преобразованиях. Но если мы ограничимся контактными преобразованиями, которые сохраняют одномерное распределение $\mathcal{F}\langle X_1\rangle$, то мы можем использовать четырехмерное многообразие T^*M вместо пятимерного многообразия 1-джетов J^1M. Действительно, в этом случае $\omega = \pi^*(\widetilde{\omega})$ для некоторой дифференциальной 2-формы $\widetilde{\omega} \in \Omega^2(T^*M)$, где $\pi : J^1M \to T^*M$ — естественная проекция. Симплектическая структура на T^*M порождается универсальной дифференциальной 1-формой ρ: $\Omega = -d\rho$. Уравнения Монжа-Ампера (1), коэффициенты которого не зависят от v, называются *симплектическими*.

Дифференциальную 2-форму $\omega \in \Omega^2(T^*M)$ будем называть *эффективной*, если $\pi^*(\omega) \in \Omega^2(J^1M)$ — эффективная форма.

Пусть E_ω — симплектическое дифференциальное уравнение. *Пфаффиан* $\mathrm{Pf}(\omega) \in C^\infty(T^*M)$ дифференциальной 2-формы ω мы определим формулой (4), а оператор $A_\omega : D(T^*M) \to D(T^*M)$ — формулой (3). Он наследует основные свойства "неголономного" поля эндоморфизмов, определенного в главе I. Тип симплектического уравнения (эллиптический, гиперболический, параболический, переменный) определяется так же, как и в главе I.

Если симплектическое уравнение Монжа-Ампера невырождено, то в каждой точке $a \in T^*M$ касательное пространство к T^*M или его комплексификация раскладывается в прямую сумму собственных пространств $\mathcal{V}_\pm(a)$ оператора A_{ω_a}. Распределения $\mathcal{V}_+$ и $\mathcal{V}_-$ мы также будем называть *характеристическими*.

Если симплектическое уравнение E_ω невырождено, то эффективную 2-форму ω можно нормировать так, чтобы $\mathrm{Pf}(\omega) = \pm 1$. В силу формулы (5) это означает, что гиперболические симплектические уравнения определяют структуры почти произведения на T^*M, а эллиптические — почти комплексные структуры.

Два симплектических уравнения E_ω и E_θ (оператора Δ_ω и Δ_θ) будем называть *локально симплектически эквивалентными* в точке $a \in T^*M$, если существует локальный симплектический диффеоморфизм ϕ, сохраняющий точку a, и такой, что $\phi(E_\omega) = E_\theta$ ($\phi(\Delta_\omega) = \Delta_\theta$).

Пусть E_ω — симплектическое невырожденное уравнение Монжа-Ампера. Разложение касательного пространства к $T_a(T^*M)$ (или его комплексификации) в прямую сумму $\mathcal{V}_+(a) \oplus \mathcal{V}_-(a)$ порождает разложение комплекса де Рама на T^*M.

Форму Лапласа симплектического уравнения мы определим как косую свертку тензорных полей: $\lambda = \langle \tau_{-1,2}, \tau_{2,-1} \rangle_W$.

Пусть E_ω — симплектическое уравнение Монжа-Ампера, для которого хотя бы одно из тензорных полей $\tau_{-1,2}$ или $\tau_{2,-1}$ не обращается в нуль. Тогда формула

$$W_\omega \rfloor (\Omega \wedge \Omega) = 2d\omega,$$

однозначно определяет ненулевое векторное поле W_ω на T^*M. Применив к векторному полю W_ω оператор A_ω, мы получим векторное поле $V_\omega = A_\omega W_\omega$. Пусть X_ω — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом $F_\omega = \mathrm{Pf}(\omega)$, то есть $X_\omega \rfloor \Omega = -dF_\omega$. Нами показано, что векторное поле

$$\nabla_\omega = \frac{1}{4\,\mathrm{Pf}(\omega)}(X_\omega + 2V_\omega)$$

является дифференциальным инвариантом уравнения: $\nabla_{h\omega} = \nabla_\omega$ для любой функции h. Проекции этого векторного поля на характеристические распределения дают два векторных поля $\nabla_+ \in D(\mathcal{V}_+)$ и $\nabla_- \in D(\mathcal{V}_-)$. Для гиперболических уравнений эти векторные поля — вещественные, а для эллиптических уравнений — комплексные. Две дифференциальные 1-формы $\mu_+ = \nabla_+ \rfloor \Omega$ и $\mu_- = \nabla_- \rfloor \Omega$, также являются абсолютными дифференциальными инвариантами симплектических уравнений.

В п. 4.2 "Уравнения с интегрируемыми распределениями" рассматривается случай, когда распределения $\mathcal{F}\langle \mu_+ \rangle$ и $\mathcal{F}\langle \mu_- \rangle$ вполне интегрируемы. Симплектическое гиперболическое уравнение Монжа-Ампера, у которого распределения $\mathcal{F}\langle \mu_+ \rangle$ и $\mathcal{F}\langle \mu_- \rangle$ вполне интегрируемы, симплектически эквивалентно уравнению вида

$$v_{xy} = f(x, y, v_x, v_y), \tag{14}$$

где f — некоторая гладкая функция. В этом случае формула

$$[\nabla_+, \nabla_-] = g_+ \nabla_+ + g_- \nabla_-$$

определяет два скалярных дифференциальных инварианта g_+ и g_- уравнения Монжа-Ампера, а формула $\nabla_+ \rfloor d\mu_+ = g_0 \mu_+$ — дифференциальный инвариант g_0. Для уравнения (14) эти инварианты имеют вид:

$$g_0 = -f_{p_1p_2}, \qquad g_+ = \frac{f_{p_1}f_{p_2p_2}}{f_{p_2}} \qquad \text{и} \qquad g_- = -\frac{f_{p_2}f_{p_1p_1}}{f_{p_1}}.$$

Если в точке $a \in T^*M$ функция g_+g_- не обращаются в нуль, то для уравнения Монжа-Ампера E_ω в некоторой окрестности этой точки однозначно определен набор из четырех линейно независимых дифференциальных 1-форм $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_4)$ на T^*M, таких, что

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 \quad \text{и} \quad \omega = \theta_1 \wedge \theta_2 - \theta_3 \wedge \theta_4. \tag{15}$$

Представление (15) позволяет свести вопрос о симплектической эквивалентности уравнений к вопросу об эквивалентности e-структур.

Теорема 23. *Пусть для каждого из симплектических гиперболических уравнения Монжа-Ампера E_1 и E_2 распределения $\mathcal{F}\langle\mu_+\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\mu_-\rangle$ вполне интегрируемые, а функции g_+g_- в точке a_0 не обращаются в нуль. Уравнения E_1 и E_2 локально симплектически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие e-структуры Θ_1 и Θ_2.*

Следующие две теоремы дает классификацию уравнений Монжа-Ампера, у которых инварианты g_0, g_+ и g_- являются постоянными.

Теорема 25. *Пусть для уравнения Монжа-Ампера распределения $\mathcal{F}\langle\mu_+\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\mu_-\rangle$ вполне интегрируемы.*

Уравнение локально симплектически эквивалентно линейному уравнению вида

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y),$$

тогда и только тогда, когда его скалярные дифференциальные инварианты g_+, g_- и g_0 равны нулю.

Теорема 26. *Пусть для уравнения Монжа-Ампера распределения $\mathcal{F}\langle\mu_+\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\mu_-\rangle$ вполне интегрируемы и скалярные дифференциальные инварианты g_+, g_- и g_0 — постоянные.*

1. *Если $g_+ \neq 0$, а $g_- = g_0 = 0$, то уравнение локально симплектически эквивалентно уравнению вида*

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)\exp\frac{\alpha v_y}{a(x,y)} + c(x,y) \quad (\alpha \neq 0).$$

2. Если $g_- \neq 0$, а $g_+ = g_0 = 0$, то уравнение локально симплектически эквивалентно уравнению вида

$$v_{xy} = a(x,y)v_y + b(x,y)\exp\frac{\beta v_x}{a(x,y)} + c(x,y) \quad (\beta \neq 0).$$

3. Если $g_- = g_+ = 0$, а $g_0 \neq 0$, то уравнение локально симплектически эквивалентно уравнению вида

$$v_{xy} = \gamma v_x v_y + a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y) \quad (\gamma \neq 0).$$

4. Если $g_- \neq 0, g_+ \neq 0$ и $g_0 \neq 0$, то уравнение локально симплектически эквивалентно уравнению вида

$$v_{xy} = \frac{1}{4a(x,y)}(2a(x,y)v_x + \gamma v_y)^2 + b(x,y)(2a(x,y)v_x + \gamma v_y) + c(x,y).$$

Здесь a, b, c — некоторые гладкие функции.

Заметим, что при постоянных g_+, g_- и g_0 другие возможности реализоваться не могут.

Мы также рассматриваем случай, когда распределения $\mathcal{F}\langle\mu_+\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\mu_-\rangle$ не являются вполне интегрируемыми. Для таких уравнений нами также построено представление вида (15) и решена проблема локальной эквивалентности. В качестве примера мы рассматриваем уравнение вида

$$v_{xx} - f^2(x,y,v_x,v_y)v_{yy} = 0$$

и строим для него указанную e-структуру.

В п. 4.3 "Эллиптические уравнения" строится аналог теории, развитой в п. 4.2. Для уравнений, у которых комплексные распределения $\mathcal{F}\langle\mu_+\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\mu_-\rangle$ вполне интегрируемы, нами построены скалярные дифференциальные инварианты второго порядка s_0, s_1, s_2. Для уравнения

$$v_{xx} + v_{yy} = f(x,y,v_x,v_y)$$

эти инварианты имеют вид: $s_0 = -f_{p_1p_1} - f_{p_2p_2}$,

$$s_1 = \frac{2\left((f_{p_1}^2 - f_{p_2}^2)f_{p_1p_2} - f_{p_1}f_{p_2}(f_{p_1p_1} - f_{p_2p_2})\right)}{f_{p_1}^2 + f_{p_2}^2},$$
$$s_2 = \frac{(f_{p_2}^2 - f_{p_1}^2)(f_{p_1p_1} - f_{p_2p_2}) - 4f_{p_1}f_{p_2}f_{p_1p_2}}{f_{p_1}^2 + f_{p_2}^2}.$$

Следующая теорема указывает критерий симплектической линеаризации эллиптических уравнений.

Теорема 32. *Пусть для эллиптического уравнения Монжа-Ампера комплексные распределения $\mathcal{F}\langle\mu_+\rangle$ и $\mathcal{F}\langle\mu_-\rangle$ вполне интегрируемы.*

1. Уравнение локально симплектически эквивалентно уравнению Лапласа $v_{xx} + v_{yy} = 0$ тогда и только тогда, когда его форма Лапласа равна нулю.

2. Пусть форма Лапласа уравнения не обращается в нуль в точке $a_0 \in T^*M$. Уравнение локально симплектически эквивалентно линейному уравнению $v_{xx} + v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)$ тогда и только тогда, когда $s_0 = s_1 = s_2 = 0$.

Кроме того, при выполнении некоторых условий общего положения, нами построен набор линейно независимых дифференциальных 1-форм $\theta_1, \ldots, \theta_4$ на T^*M, таких, что

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 \quad \text{и} \quad \omega = \theta_3 \wedge \theta_2 + \theta_4 \wedge \theta_1.$$

Также как для гиперболических уравнений, последнее представление позволяет свести вопрос о симплектической эквивалентности эллиптических уравнений к вопросу об эквивалентности e-структур. В качестве примера мы рассматриваем уравнение вида

$$v_{xx} + f^2(x, y, v_x, v_y)v_{yy} = 0.$$

В п. 4.4 "Уравнения переменного типа" рассматривается задача классификации симплектических уравнений Монжа-Ампера E_ω в окрестности гиперповерхности $\{\mathrm{Pf}\,(\omega) = 0\} \subset T^*M$ перемены типа уравнения. Предполагается, что эта гиперповерхность является гладким подмногообразием.

Для уравнений переменного типа общего положения построен набор инвариантных линейно независимых дифференциальных форм $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_4)$ на T^*M, таких, что

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 + \theta_3 \wedge \theta_4 \quad \text{и} \quad \widetilde{\omega} = \theta_3 \wedge \theta_2 + \widetilde{F}\theta_4 \wedge \theta_1.$$

Здесь $\widetilde{F}$ — скалярный инвариант уравнения Монжа-Ампера (нормированный пфаффиан), а $\widetilde{\omega}$ — инвариантная дифференциальная 2-форма, порождающая уравнение E_ω, то есть $E_{\widetilde{\omega}} = E_\omega$. Таким образом, как и для невырожденных уравнений Монжа-Ампера общего положения, вопрос о симплектической эквивалентности уравнений сводится в вопросу об эквивалентности соответствующих e-структур.

Нами рассматриваются уравнения Монжа-Ампера переменного типа, локально эквивалентные уравнению Трикоми

$$v_{xx} + xv_{yy} + \alpha v_x + \beta v_y + f(x, y) = 0 \tag{16}$$

и уравнению Келдыша:

$$xv_{xx} + v_{yy} + \alpha v_x + \beta v_y + f(x, y) = 0, \tag{17}$$

Здесь α и β — постоянные, а f — гладкая функция.

Обобщением этих уравнений является уравнения

$$v_{xx} + xv_{yy} = h(x, y, v_x, v_y) \tag{18}$$

и

$$xv_{xx} + v_{yy} = f(x, y, v_x, v_y). \tag{19}$$

соответственно. Здесь h — гладкая функция.

Сформулируем условия локальной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера переменного типа уравнениям (16)–(19).

Пусть E_ω — уравнение Монжа-Ампера переменного типа, причем дифференциал пфаффиана формы ω не обращается в нуль в точке $a_0 \in \{\mathrm{Pf}\,(\omega) = 0\}$. Тогда локальным симплектическим преобразованием, сохраняющим точку a_0, функцию $F = \mathrm{Pf}\,(\omega)$ можно перевести в функцию q_1. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $F = q_1$ и рассматривать далее симплектические преобразования, сохраняющие функцию F.

Определим векторное поле $Z = A_\omega X_F$, где X_F — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом F.

Теорема 36. *Уравнение E_ω в точке a_0 локально симплектически эквивалентно уравнению (18) тогда и только тогда, когда векторное поле Z гамильтоново и не обращается в нуль в точке a_0.*

Если, кроме того, выполняется равенство $W_\omega + \alpha Z + \beta X_F = 0$ для некоторых постоянных α и β, то уравнение E_ω локально симплектически эквивалентно уравнению Трикоми (16).

Заметим, что уравнение (19) отличается от уравнения (18) тем, что векторное поле Z, ограниченное на гиперповерхность смены типа, — нулевое. Поэтому мы введем в рассмотрение векторное поле $Y = \dfrac{1}{F}Z$.

Теорема 37. *Уравнение E_ω в точке a_0 локально симплектически эквивалентно уравнению (19) тогда и только тогда, когда векторное поле Y гамильтоново и не обращается в нуль в точке a_0.*

Если, кроме того, выполняется равенство $W_\omega + (\alpha-1)Y + \beta X_F = 0$ для некоторых постоянных α и β, то уравнение E_ω локально симплектически эквивалентно уравнению Келдыша (17).

В качестве приложения теорем 36 и 37 мы рассматриваем уравнение потока многокомпонентной газовой смеси

$$(v_x + \beta)v_{xx} - v_{yy} = 0 \qquad (\beta = \mathrm{const}) \tag{20}$$

и уравнение Максвелла-Эйнштейна в форме Эрнста[21], описывающее аксиально симметричное стационарное гравитационное поле:

$$\left(\left(x^2 - 1\right) v_x\right)_x + \left(\left(1 - y^2\right) v_y\right)_y = 0.$$

Первое из них в окрестности точек смены типа эквивалентно уравнению (16) с $\alpha = \beta = 0$ и $f = 0$, а второе — уравнению (17) с $\alpha = -1$, $\beta = 0$ и $f = 0$.

Мы также указываем необходимые и достаточные условия приводимости уравнений Монжа-Ампера переменного типа уравнениям вида

$$v_{xx} + x^n v_{yy} + \alpha v_x + \beta v_y + f(x, y) = 0$$

и

$$x^n v_{xx} + v_{yy} + \alpha v_x + \beta v_y + f(x, y) = 0,$$

которые обобщают уравнения (16) и (17).

В п. 4.5 “Классификация операторов Монжа-Ампера переменного типа” строятся четыре инвариантных векторных поля, образующие e-структуру на кокасательном расслоении. В случае, когда эти поля порождают алгебру Ли, получены восемь нормальных форм операторов.

Как приложение полученного результата мы рассматриваем уравнение потока многокомпонентной газовой смеси[22], обобщающее уравнение (20):

$$(bv_x + a)v_{xx} - c^2 v_{yy} + kv_x = 0. \tag{21}$$

Здесь a, b, c, k — некоторые постоянные параметры. Построено симплектическое преобразование, переводящее это уравнение в уравнение

$$v_{yy} + v_x v_{xx} + \lambda v_x = 0.$$

Заметим, что последнее уравнение, в отличие от уравнения (21), содержит только один параметр.

[21] Ernst F.J. Black holes in a magnetic Universe // J. Math. Phys. – 1976. – Vol. 17. – P. 54–56.
[22] Ларькин Н.А. Гладкие решения уравнений трансзвуковой газовой динамики. – Новосибирск: “Наука”, 1991. – 143 с.

В **приложении I** приводятся структуры алгебр Ли, отвечающих операторам Монжа-Ампера переменного типа, а в **приложении 2** — листинг компьютерной программы для вычисления инвариантов Лапласа уравнений вида $v_{xy} = f(x, y, v, v_{,x}, v_y)$, написанной на языке системы компьютерной алгебры Maple-13.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Кушнер, А.Г. Нормальные формы Чаплыгина и Келдыша уравнений Монжа-Ампера [Текст] / А.Г. Кушнер // Математические заметки. – 1992. – Т.52. – №5. – С. 63–67. – 0,31 п.л.

2. Кушнер, А.Г. Уравнения Монжа-Ампера и e-структуры [Текст] / А.Г. Кушнер // ДАН. – 1998. – Т. 361. – №5. С. 595–596. – 0,13 п.л.

3. Кушнер, А.Г. Симплектическая классификация гиперболических операторов Монжа-Ампера [Текст] / А.Г. Кушнер // Вестник Астраханского государственного технического университета. – 2007. – Т. 1. – №36. – С. 15–18. – 0,25 п.л.

4. Кушнер, А.Г. Приведение гиперболических уравнений Монжа-Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами [Текст] / А.Г. Кушнер // ДАН. – 2008. – Т. 423. – №5. – С. 609–611. – 0,19 п.л.

5. Кушнер, А.Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа-Ампера и инварианты Лапласа [Текст] / А.Г. Кушнер // ДАН. – 2008. – Т. 422. – № 5. – С. 597–600. – 0,25 п.л.

6. Kushner, A.G. A contact linearization problem for Monge-Ampère equations and Laplace invariants [Текст] / A.G. Kushner // Acta Appl. Math. – 2008. – Vol. 101. – №1–3. P. 177–189. – 0,81 п.л.

7. Kushner, A.G. On contact equivalence of Monge-Ampère equations to linear equations with constant coefficients [Текст] / A.G. Kushner // Acta Appl. Math. – 2010. – Vol. 109. – №1. P. 198–210. – 0,81 п.л. Online First: DOI 10.1007/s10440-009-9447-z (2009)

Публикации в других изданиях

8. Кушнер, А.Г. Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа-Ампера [Текст] / А.Г. Кушнер. – В сб. “Движения в обобщенных пространствах”. – Пенза: Изд-во ПГПУ. – 2005. – С. 56–65. – 0,63 п.л.

9. Кушнер, А.Г. Гиперболические уравнения Монжа-Ампера: проблема Софуса Ли контактной линеаризации [Текст] / А.Г. Кушнер. – Сборник научных трудов I Международного семинара “Симметрии: теоретический и методический аспекты”. – 2005. – Астрахань. С. 20–23 (2005) – 0,25 п.л.

10. Кушнер, А.Г. Гиперболические уравнения Монжа-Ампера: проблема контактной эквивалентности [Текст] / А.Г. Кушнер // Естественные науки. – 2005. – №10. – С. 101–104. – 0,25 п.л.

11. Кушнер, А.Г.: Тензорные инварианты гиперболических уравнений Монжа-Ампера [Текст] / А.Г. Кушнер // Естественные науки. – 2005. – №10. – С. 143–146. – 0,25 п.л.

12. Кушнер, А.Г.: $\mathcal{AP}$-структуры и тензор Хаантьеса [Текст] / А.Г. Кушнер. – Сб. трудов Международного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева. "Лаптевские чтения–2006", 2007. – Пенза: Изд-во ПГПУ. – С. 57–62. – 0,38 п.л.

13. Кушнер, А.Г. Контактная геометрия уравнений Монжа-Ампера и структура почти произведений [Текст] / А.Г. Кушнер. – Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова, Абрау-Дюрсо, 5 – 11 сентября 2006 г. – С. 51. – 0,06 п.л.

14. Кушнер, А.Г. Контактная линеаризация нелинейных уравнений в частных производных [Текст] / А.Г. Кушнер. – Труды Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Москва, ИПУ, 31 мая – 2 июня 2006 г. – 0,13 п.л.

15. Кушнер, А.Г. Контактная классификация уравнений Монжа-Ампера [Текст] / А.Г. Кушнер. – In: G. L. Litvinov, V. P. Maslov (ed). Proceedings of the International Workshop "Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Phisics" (Moscow, August 25–30, 2007). – 2007. – Vol. 2. – P. 99–104. – 0,38 п.л.

16. Кушнер, А.Г. Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа-Ампера [Текст] / А.Г. Кушнер // Изв. ВУЗов. Математика. – 2008. – №4. – С. 43–58. – 1 п.л.

17. Кушнер, А.Г. Симплектическая классификация гиперболических уравнений Монжа-Ампера [Текст] / А.Г. Кушнер, Е.Н. Манжосова. – Proceedings of the International Geometry Center. – 2008. – Vol. 1. – №2. – P. 41–70. – 1,9 п.л.

18. Кушнер, А.Г. О приведении уравнений Монжа-Ампера к уравнению Эйлера-Пуассона [Текст] / А.Г. Кушнер // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки – 2009. – Том 151. – №4. – С.60–71. – 0,75 п.л.

19. Кушнер, А.Г. Нормальные формы для уравнений Монжа-Ампера: телеграфное уравнение и уравнение Гельмгольца [Текст] / А.Г. Кушнер. – Гольдберг, В.В., Кузаконь, В.М., Кушнер, А.Г., Лычагин, В.В., Шарко В.В. (ред.) "Геометрiя, топологiята їх застосуваня". Збiрник Праць Iн-ту математики НАН Украiни. – 2009. – Т.6. – №2.– С. 91–122. – 2 п.л.

20. Кушнер, А.Г. Контактные инварианты и линеаризация уравнения Хантера-Сакстона [Текст] / А.Г. Кушнер, Е.Н. Манжосова // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2009. – №3. – С. 536–537. – 0,13 п.л.

21. Kushner, A.G. The problem of equivalence of non-linear partial differential equations of mixed type [Текст] / A.G. Kushner. – In: "Proceedings of the Lie-Lobachevsky Colloq.". Tartu, Estonia, 26 – 30 October 1992. – 0,13 п.л.

22. Kushner, A.G. Classification of mixed type Monge-Ampère equations [Текст] / A.G. Kushner. – In: Pràstaro, A., Rassias, Th.M. (ed) "Geometry in Partial Differential Equations". Singapore New-Jersey London Hong-Kong, World Scientific, 1993. – P. 173–188. – 1,13 п.л.

23. Doubrov, B. The Morimoto problem [Текст] / B. Doubrov, A. Kushner. – In: Pràstaro, A., Rassias, Th.M. (ed) "Geometry in Partial Differential Equations". Singapore New-Jersey London Hong-Kong, World Scientific, 1993. – P. 91–99. – 0,56 п.л.

24. Kushner, A.G.: Symplectic geometry of mixed type equations [Текст] / A.G. Kushner. – In: Lychagin, V.V. (ed) "The Interplay beetween Differential Geometry and Differential Equations". Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – 1995. – Vol. 167. – P. 131–142. – 0,75 п.л.

25. Kovalenko, I.B. Symmetries and exact solutions of nonlinear diffusion equation [Текст] / I.B. Kovalenko, A.G. Kushner. – In: Proceedings of the 5th conference of the European society of the mathematical and theoretical biology "Mathematical Modelling & Computing in Biology and Medicine". Milano, Italy – 2002. – P. 239–243. –0,31 п.л.

26. Kovalenko, I.B. The nonlinear diffusion and thermal conductivity equation: group classification and exact solutions [Текст] / I.B. Kovalenko, A.G. Kushner // Regular and Chaotic Dynamics. – 2003. – Vol. 8. – №2. – P. 8–31. – 1,5 п.л.

27. Kushner, A.G. Almost product structures and Monge-Ampère equations [Электронный ресурс] / A.G. Kushner // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2006. – Vol. 23. – P. 151–181. – 2 п.л. URL: `http://ljm.ksu.ru` (дата обращения 10.11.2009)

28. Kushner, A.G. Symplectic classification of elliptic Monge-Ampère operators [Текст] / A.G. Kushner. – In: Proceedings of the 4th International colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics" October 6-8 , 2006, Bucharest, Romania. Balkan Society of Geometers. – 2007. – Geometry Balkan Press. – P. 87–94. – 1 п.л.

29. Kushner, A.G. Contact geometry and nonlinear differential equations [Текст] / A.G. Kushner, V.V. Lychagin, V.N. Rubtsov. – Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Vol. 101. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – xxii+496 pp. – 32,38 п.л.

30. Kushner, A.G. Classification of Monge-Ampère equations [Текст] / A.G. Kushner. – In: B. Kruglikov, V. Lychagin, E. Straume (ed) "Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability". Proceedings of the Fifth Abel Symposium, Tromso, Norway, June 17–22, 2008. – P. 223–256. – 2 п.л.

Подписано к печати «11» ноября 2009 г. Формат 60×90/16 . Бумага писчая. Печать цифровая. Усл. печ. л. 2. Тираж 120 экз. Заказ 13594.

«Астраханская цифровая типография»

414040, г. Астрахань, пл. К. Маркса, 33. Тел./Факс (8512) 54 63 95

Издательский дом «Астраханский университет»

414056 г. Астрахань, ул. Татищева, 20а.